WILF-FLOKKUN MÖSKVAMYNSTRA
Vor 2011

Ingibjörg Jónsdóttir   Ísak Hilmarsson
Sigríður Lína Viðarsdóttir   Steinunn Gróa Sigurðardóttir

30. mars 2011

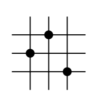
Við erum fjórir nemendur í Háskólanum í Reykjavík sem vinnum að B.Sc. verkefni um Wilf-flokkun möskvamynstra af lengd 2 undir leiðsögn Hennings Arnórs Úlfarssonar. Hér á eftir fylgir stutt kynning á efninu.

Umraðanir

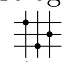
Látum A vera endanlegt mengi, sem er ekki tómamengið. *Umröðun* á A er gagnkvæm samsvörun (e. one-to-one correspondence) frá A yfir í sjálft sig. Hér eftir látum við A vera mengið $\{1, 2, \ldots, n\}$ og táknum umröðun sem orð. Þannig er umröðun π af lengd n táknuð á eftirfarandi hátt $\pi = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$. Sem dæmi er $\pi = 132$ umröðun á menginu $\{1, 2, 3\}$, með $\pi_1 = 1, \pi_2 = 3$ og $\pi_3 = 2$. Látum S_n tákna mengi allra umraðana af lengd n.

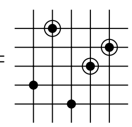
Hefðbundin mynstur

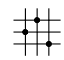
Hefðbundið mynstur er umröðun $p \in S_k$. Mynstrið $p = 231$ má teikna á eftirfarandi hátt

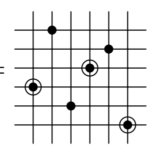
231 = 

Láréttu línurnar tákna gildi og lóðréttu línurnar staðsetningu í umröðuninni. Þar sem 2 er fyrsti stafurinn í p er fyrsti punkturinn staðsettur á annarri láréttu línunni, talið að neðan, og á fyrstu lóðréttu línunni. Annar stafurinn í p er 3 og því er annar punkturinn á þriðju láréttu línunni og annarri lóðréttu. Síðasti punkturinn er svo á fyrstu láréttu og þriðju lóðréttu línunni. Á sama hátt má teikna umraðanir.

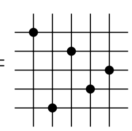
Sagt er að umröðun $\pi \in S_n$ hafi *tilvik* af mynstri p (eða *innihaldi* mynstrið) ef í henni er runa talna þar sem stafirnir eru í sömu röð miðað við stærð og stafirnir í p. Umröðunin 25134 inniheldur tilvik af mynstrinu $p = 312 =$  með rununni 534, þar sem hún er í sömu röð miðað við stærð og stafirnir í mynstrinu p. Það er, hæsta gildið í rununni kemur fyrst, svo lægsta og að lokum gildið þar á milli. Gott er að sjá þetta myndrænt, teiknum umröðunina eins og mynstrið var teiknað að ofan og merkjum tilvik af mynstrinu inn á.

$\pi = 25134 =$ 

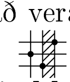
Umröðunin $\pi = 362451$ inniheldur mynstrið $p = 231 =$  þar sem í π finnst tilvik af p, runan 341. Sjáum þetta myndrænt:

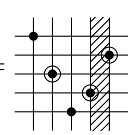
$\pi = 362451 =$ 

Við segjum að umröðun sem inniheldur ekki tiltekið mynstur *forðist* mynstrið. Umröðun $\pi \in S_n$ forðast mynstrið $p = 231$ ef það er ekki til $1 \leq i < j < k \leq n$ þannig að $\pi(k) < \pi(i) < \pi(j)$. Dæmi um umröðun sem forðast mynstrið p er 51423. Sjáum þetta á mynd

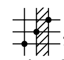
$\pi = 51423 =$ 

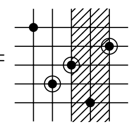
Spyrt mynstur

Spyrt mynstur voru fyrst skilgreind af Babson og Steingrímsson [1]. Tilvik af spyrtu mynstri í umröðun krefst þess að stafir séu samliggjandi í umröðuninni. Spyrt mynstur verður hér eftir táknað eins og hefðbundið mynstur, en stafir sem eiga að vera samliggjandi eru undirstrikaðir. Sem dæmi gerir mynstrið $p = 2\underline{13} =$  kröfu um að stafirnir sem samsvara 1 og 3 í umröðun séu samliggjandi. Myndrænt þýðir það að engir punktar séu á skyggða svæðinu. Við sjáum að tilvik af mynstrinu p finnst í umröðuninni

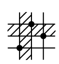
$\pi = 53124 =$ 

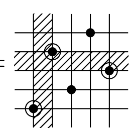
Þar sem π inniheldur hefðbundna mynstrið 213 með rununni 324 og stafirnir sem samsvara 1 og 3 í mynstrinu, þ.e. 2 og 4 eru samliggjandi í π, þá eru engir punktar á skyggða svæðinu.

Umröðunin $\pi = 52314$ forðast mynstrið $p = 1\underline{23} =$ , þar sem eina tilvikið af grunnmynstrinu í umröðuninni er 234 og stafirnir 3 og 4 eru ekki samliggjandi. Við sjáum á myndinni að punkturinn sem samsvarar 1 í umröðuninni er á skyggða svæðinu.

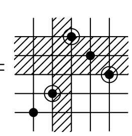
$\pi = 52314 =$ 

Tvíspyrt mynstur

Tvíspyrt mynstur setja skilyrði á staðsetningar og gildi í umröðun og voru fyrst skilgreind af Bousquet-Mélou, Claesson, Dukes og Kitaev [2]. Tvíspyrt mynstur verða táknuð með undirstrikun og yfirstrikun. Undirstrikuðu stafirnir tákna að stafir þurfi að vera samliggjandi í umröðun, eins og í spyrtu mynstri. Yfirstrikuðu stafirnir tákna að samsvarandi stafir í umröðun verða að vera samliggjandi í gildum. Sem dæmi má nefna að mynstrið $p = \frac{1\overline{23}}{\underline{13}2} =$  gerir kröfu um að stafirnir sem samsvara 2 og 3 í umröðun hafi samliggjandi gildi og að 1 og 3 séu hlið við hlið í umröðuninni. Umröðunin

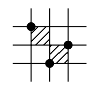
$\pi = 14253 =$ 

inniheldur mynstrið p þar sem hún inniheldur hefðbundna mynstrið 132 með rununni 143 og stafirnir 1 og 4 eru samliggjandi í umröðuninni og 3 og 4 eru samliggjandi í gildum. Með öðrum orðum þýðir það að engir punktar séu á skyggða svæðinu. Hins vegar inniheldur umröðunin $\pi = 12543$ tilvik af hefðbundna mynstrinu 132, með rununni 253 en hefur 5 og 3 ekki samliggjandi í gildum. Þar af leiðandi er þetta ekki tilvik af mynstrinu p þar sem punkturinn sem táknar 4 í umröðuninni fellur inn á skyggða svæðið.

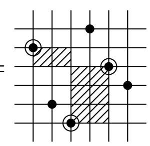
$\pi = 12543 =$ 

Möskvamynstur

Eftir að hafa kynnst spyrtum og tvíspyrtum mynstrum er forvitnilegt að skoða möskvamynstur sem voru fyrst skilgreind almennt af Brändén og Claesson [3]. Par (p, R) þar sem p er umröðun í S_k og R er hlutmengi í $[\![0,k]\!] \times [\![0,k]\!]$ er *möskvamynstur*. Dæmi um möskvamynstur er hefðbundna mynstrið 312 með $R = \{(1,2),(2,1)\}$. Teiknum mynstrið á eftirfarandi hátt

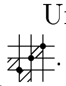
$$(312, \{(1,2),(2,1)\}) =$$ 

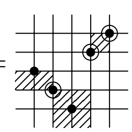
Stökin í R eru hnit sem tákna neðra vinstra hornið á hverjum fylltum ferningi. Sjáum umröðun sem inniheldur þetta mynstur

$$\pi = 521643 =$$ 

Umröðunin inniheldur tilvik af mynstrinu með stöfunum 514, þar sem þeir mynda grunnmynstrið 312 og svo vegna þess að engir punktar eru á skyggða svæðinu.

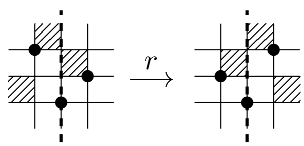
Á sama hátt og um hefðbundin mynstur segjum við að umröðun forðist möskvamynstur ef ekki finnst tilvik af mynstrinu, þ.e. í öllum tilvikum af grunnmynstrinu er a.m.k. einn punktur á skyggða svæðinu.

Umröðunin $\pi = 32145$ forðast mynstrið $p = (123, \{(0,1),(1,0),(2,2)\}) =$ . Það er vegna þess að fyrir öll tilvik af grunnmynstrinu 123 falla punktar inn á skyggðu svæðin. Runan 245 í π er tilvik af grunnmynstrinu 123 en ekki tilvik af mynstrinu p þar sem punkturinn sem táknar 1 fellur inn á skyggða svæðið. Sjáum mynd

$$\pi = 32145 =$$ 

Wilf-flokkun

Tvö mynstur, p og q, eru sögð vera *Wilf-jafngild* ef sami fjöldi umraðana af lengd n forðast mynstrin, fyrir öll n. Til dæmis eru öll hefðbundin mynstur af lengd 3 Wilf-jafngild, þar sem fjöldi umraðana af lengd n sem forðast hefðbundið mynstur af lengd 3 er ávallt n-ta Catalan-talan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Markmið B.Sc. verkefnisins okkar er að Wilf-flokka möskvamynstur af lengd 2, þ.e. að flokka saman þau mynstur sem sami fjöldi umraðana forðast. Þetta gerum við með því að skoða hversu margar umraðanir af lengd n, fyrir lítil n, forðast mynstrið. Til þess notum við reiknialgebruforritið Sage[1]. Því næst reynum við að finna formúlu fyrir fjöldann og sanna þá formúlu fyrir öll n. Þar sem fjöldi möskvamynstra af lengd 2 er 1024 er nauðsynlegt að minnka fjölda þeirra mynstra sem þarf að skoða. Við getum nýtt okkur þekktar speglanir á mynstrunum, en þær eru viðsnúningur (e. reverse) táknuð með r, umsnúningur (e. complement) táknuð með c, og andhverfa (e. inverse) táknuð með i. Þessar speglanir varðveita Wilf-jafngildi. Með viðsnúningi er mynstri p speglað um y-ás og þannig myndast nýtt mynstur p^r. Skoðum þessa speglun á mynstrinu $(312, \{(0,1),(1,3),(2,2)\})$.



Þá fæst að ef umröðun π forðast p þá forðast speglaða umröðunin π^r mynstrið p^r. Þannig varðveitist Wilf-jafngildi með aðgerðinni. Hinar speglanirnar, umsnúningur og andhverfa eru speglanir um x-ás og línuna $y = x$. Þær eru svipaðar viðsnúningi svo við skoðum þær ekki sérstaklega.

Tvö möskvamynstur p og q eru sögð vera *jafngild*, táknað með $\cong$, ef fyrir umröðun π gildir að π forðast p þá og því aðeins að π forðist q. Augljóslega gildir að jafngild möskvamynstur eru Wilf-jafngild. Við höfum í B.Sc. verkefninu kynnt til sögunnar nýja aðgerð sem finnur jafngild mynstur, skoðum hana.

Skilgreining. Látum $[i, j]$ vera ferning þar sem hornin hafa hnitin

$$(i, j),\ (i, j+1),\ (i+1, j+1) \text{ og } (i+1, j).$$

Látum p vera möskvamynstur. Með því að nota aðgerðina fáum við nýtt mynstur q, sem er jafngilt p.

Hjálparsetning (Skyggingarsetningin)**.** *Látum (p, R) vera möskvamynstur af lengd n þannig að $p(i) = j$ og $[i, j] \notin R$. Mynstrin (p, R) og $(p, R \cup \{[i, j]\})$ eru jafngild ef öll eftirfarandi skilyrði eru uppfyllt.*

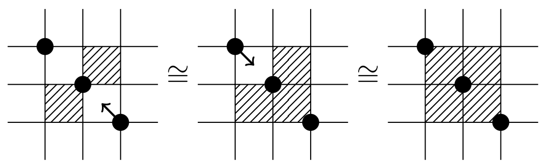
- *Ferningurinn $[i-1, j-1]$ er ekki í R;*
- *Ferningarnir $[i, j-1]$, $[i-1, j]$ eru ekki í R;*

[1] `http://www.sagemath.org`

- *Ef ferningurinn* $[\ell, j-1]$ *er í* R*,* $(\ell \neq i-1, i)$ *þá er* $[\ell, j]$ *líka í* R*;*
- *Ef ferningurinn* $[i-1, \ell]$ *er í* R*,* $(\ell \neq j-1, j)$ *þá er* $[i, \ell]$ *líka í* R*.*

Samskonar skilyrði ákvarða hvort bæta megi öðrum ferningum í nágrenni við punktinn (i, j) *í* R*.*

Dæmi. Með því að nota hjálparsetninguna finnum við neðangreind jafngildi. Punkturinn sem örin vísar frá er punkturinn (i, j) í hjálparsetningunni.

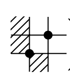


Að lokum

Með þessum samhverfum höfum við fækkað fjölda þeirra mynstra sem þarf að Wilf-flokka, þar sem hægt er að setja þau mynstur sem eru Wilf-jafngild saman í flokk. Eftir að umsnúningur, viðsnúningur, andhverfa, skyggingarsetningin og tvær aðrar nýjar samhverfur hafa verið notaðar á mynstrin verða eftir 64 flokkar. Einnig nýttum við okkur niðurstöður frá Robert Parviainen sem Wilf-flokkaði tvíspyrt mynstur [4]. Þar með fækkaði flokkunum niður í 58. Okkur hefur tekist að finna formúlur fyrir talnarunurnar sem 13 af þessum flokkum gefa.

Hér að neðan sýnum við hvernig fjöldi umraðana sem forðast tiltekin mynstur er talinn. Látum fjölda umraðana sem forðast mynstur p vera $|S_n(p)|$.

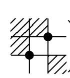
Setning.

$\Big| S_n \Big($  $\Big) \Big| = b_n,$

þar sem $b_n = (n-1)b_{n-1} + (n-2)b_{n-2}$ *og* $b_0 = b_1 = 1$*. Í sama flokki eru* 31 *önnur Wilf-jafngild mynstur og þar af leiðandi forðast jafn margar umraðanir þau.*

Þetta samsvarar talnarununni `http://oeis.org/A000255` á The Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS).

Setning.

$\Big| S_n \Big($  $\Big) \Big| = n! - \sum_{k-1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k}.$

Í sama flokki eru 83 önnur Wilf-jafngild mynstur og þar af leiðandi forðast jafn margar umraðanir þau.

Þetta er einmitt fjöldi dálka í öllum „deco polyominoes“ af hæð n og samsvarar talnarununni `http://oeis.org/A121586`. Markmiðið er að finna gagntæka vörpun milli þeirra umraðana sem forðast p og fjölda dálka í öllum „deco polyominoes“ af hæð n.

Næstu skref í verkefninu eru að sanna formúlur fyrir fleiri flokka. Enn er fjölda spurninga ósvarað varðandi möskvamynstur vegna þess hversu nýlega þau komu fram á sjónarsviðið.

Heimildir

[1] Eric Babson and Einar Steingrímsson, *Generalized permutation patterns and a classification of the Mahonian statistics*, Sém. Lothar. Combin. **44** (2000), Art. B44b, 18 pp. (electronic). MR 1758852 (2002b:05006)

[2] Mireille Bousquet-Mélou, Anders Claesson, Mark Dukes, and Sergey Kitaev, $(2+2)$*-free posets, ascent sequences and pattern avoiding permutations*, J. Combin. Theory Ser. A **117** (2010), no. 7, 884–909. MR 2652101

[3] Petter Brändén and Anders Claesson, *Mesh patterns and the expansion of permutation statistics as sums of permutation patterns*, preprint.

[4] Robert Parviainen, *Wilf classification of bi-vincular permutation patterns*, preprint.